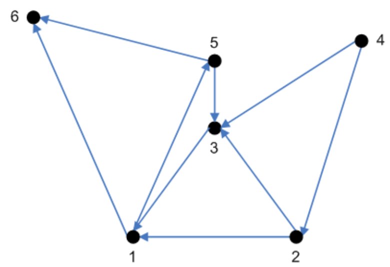
Usmerjeni grafi - Digrafi

Petra Blažič

17. februar 2007

Digraf ali usmerjen graf D definiramo kot urejeno trojko $D = (A, V, \varphi)$. Pri tem predstavlja $A(D)$ množico povezav, ki jim pravimo usmerjene povezave ali loki, $V(D)$ pa je množica točk. Preslikava φ preslika vsako povezavo v urejen par točk: $\varphi : a \rightarrow (v_1, v_2)$. Pri tem je v_1 *začetek* povezave a, v_2 pa *konec* povezave a. Točki v_1 in v_2 sta *sosednji*, saj med njima obstaja usmerjena povezava.

Mi bomo govorili predvsem o *enostavnih digrafih*. To so tisti, ki ne vsebujejo vzporednih povezav in zank. V nekaterih literaturah so definirani kot usmerjeni grafi brez večkratnih povezav in z največ eno zanko v vsaki točki. Tu moramo biti pazljivi na pomen vzporednih povezav, saj se nekoliko razlikuje od tistih, ki so v neusmerjenih grafih. Če dve ali več povezav povezuje isti urejen par točk jih imenujemo *vzporedne ali mnogokratne povezave* (v digrafu). *Zanka* pa je usmerjena povezava iz točke sama vase: $a_1 \rightarrow (v_1, v_1)$. Tu sta začetek in konec povezave enaka.



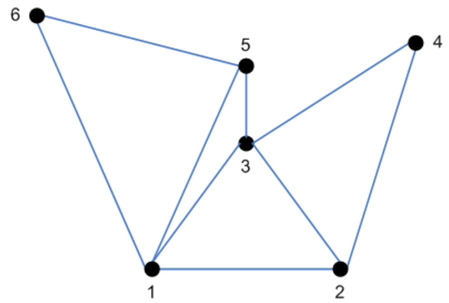
Slika 1: Primer enostavnega usmerjenega grafa.

Iz digrafa D lahko dobimo *temeljni graf (osnovni ali bazni graf)* G tako, da iz D odstranimo vse usmeritve oz. da usmerjene povezave nadomestimo z neusmerjenimi.

Trditev 0.1 *Če je temeljni graf digrafa enostaven, je tudi digraf enostaven.*

Dokaz: Naj bo D digraf, G pa njegov temeljni graf. Ker v G ni vzporednih povezav in zank, jih tudi v D ni. ■

Opomba: Obratno ne moremo sklepati. Če je digraf D enostaven potem ne sledi nujno, da je tudi temeljni graf digrafa D enostaven.



Slika 2: Temeljni graf za zgornji digraf.

Glede na usmerjenost povezav ločimo dve stopnji. *Vhodnja stopnja* $d^-(v)$ je število usmerjenih povezav, ki se končajo v točki v. *Izhodnja stopnja* $d^+(v)$ pa je število usmerjenih povezav, ki se začnejo v točki v. Točki, ki ima vhodnjo stopnjo enako 0, pravimo *izvir*; *ponor* pa je točka z izhodnjo stopnjo 0.

PRIMER (tabela za digraf iz slike 1):

točke	1	2	3	4	5	6
d^+	2	2	1	2	2	0
d^-	2	1	3	0	1	2

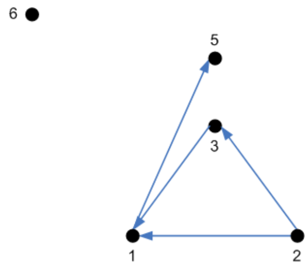
Lema 0.2 (LEMA O ROKOVANJU) *V digrafu D velja, da sta vsoti vseh vhodnih in izhodnih stopenj vseh točk enaki. To pa je enako moči množice $A(D)$ oz. številu usmerjenih povezav digrafa D.*

$$\sum_{x \in V(D)} d^+(x) = \sum_{x \in V(D)} d^-(x) = A(D)$$

Dokaz: Najprej preštejemo vse povezave, ne glede na njihovo usmerjenost. Vsako povezavo štejemo le enkrat in tako dobimo moč množice $A(D)$. Enako dobimo, če štejemo samo vhodne povezave. Tudi če bi prešteli konce vseh usmerjenih povazav, bi dobili enako. To pa je ravno vsota vseh vhodnih stopenj. ∎

Poddigraf P (podgraf digrafa D) je digraf, katerega točke so vsebovane v množici točk digrafa D in povezave P so tudi vsebovane v množici povezav digrafa D.

Digraf je *povezan*, če je njegov temeljni graf povezan, v nasprotnem je nepovezan. Digraf je *krepko povezan*, če v njem obstaja usmerjena pot med poljubnim urejenim parom točk.



Slika 3: Poddigraf digrafa iz slike 1.

Usmerjen sprehod dolžine k v digrafu D je zaporedje k usmerjenih povezav digrafa D, oblike: $uv, vw, wx, \ldots, yz$. Označimo ga z $uvwx \ldots yz$. Če so vse točke in usmerjene povezave različne, mu pravimo *usmerjena pot*. *Sklenjen sprehod* ali *obhod* v digrafu D, je zaporedje povezav digrafa D oblike: $ab, bc, cd, de, \ldots, xy, ya$. Če so vse povezave obhoda različne, ga imenujemo *enostavni obhod*. *Usmerjen cikel* je usmerjena pot za katero velja še, da je začetna točka usmerjene poti enaka končni točki. Usmerjen cikel lahko definiramo tudi kot enostaven obhod, v katerem so vse točke različne.

Trditev 0.3 *Če je izhodna stopnja vsake točke digrafa D strogo večja od 0, potem D vsebuje usmerjen cikel.*

Dokaz: Izberimo si poljubno točko v_1 digrafa D. Ker je izhodna stopnja vsake točke digrafa strogo večja od nič, mora obstajati usmerjena povezava z začetkom v točki v_1 in koncem v neki točki v_2. Kar je veljalo za točko v_1, velja tudi za točko v_2 in za vse naslednje točke. Tako dobivamo pot $v_1, v_2, \ldots, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_k$ v digrafu D. Vseh točk je končno, iz česar sklepamo, da se morajo točke naše poti začeti ponavljati. Torej obstaja točka v_i tako, da je $v_i = v_k$. Potem je $v_i, v_{i+1}, \ldots, v_{k-1}$ usmerjen cikel. ■

Trditev 0.4 *Če je vhodna stopnja vsake točke digrafa D strogo večja od 0, potem D vsebuje usmerjen cikel.*

Dokaz: Izberimo si točko a digrafa D. Ker je vhodna stopnja točke a večja od nič, obstaja usmerjena povezava s koncem v točki a. Vsaka usmerjena povezava pa mora imeti tudi začetek. Označimo začetek te povezave z b, konec pa je v točki a. Nadaljevanje dokaza je identično enako dokazu zgornje trditve. ■

Usmerjen sprehod/obhod je *Eulerjev*, če vsebuje vse usmerjene povezave digrafa. Povezan digraf je *Eulerjev*, če ima usmerjen Eulerjev obhod in poleulerjev (semieulerjev), če ima usmerjen Eulerjev sprehod. Povezan digraf D je *Hamiltonov*, če ima usmerjen cikel, ki vsebuje vse točke digrafa. Tak cikel imenujemo *Hamiltonov cikel*. *Usmerjena Hamiltonova pot* je usmerjena pot v digrafu, ki vsebuje vse točke tega digrafa.

Naslednja izreka sta zelo podobna "ekvivalentnim" izrekom za (neusmerjene) grafe. Zato teh dokazov ne bomo pisali, ampak jih prepuščamo bralcu, saj se ta dva izreka dokažeta podobno.

Izrek 0.5 *Naj bo D povezani digraf. Potem velja:*

- *D je Eulerjev natanko takrat, ko sta vhodnja in izhodnja stopnja vsake točke enaki.*
- *D je Poleulerjev natanko tedaj, ko je bodisi Eulerjev ali ko obstajata dve točki a in b v D, tako da je $d^+(a) = d^-(a)+1$ in $d^-(b) = d^+(b)+1$, za vsako drugo točko $v \in V(D)$ velja $d^+(v) = d^-(v)$.*

Izrek 0.6 (Diracov izrek) *Naj bo D enostaven digraf z n točkami ($n \geq 3$). Če je $d^+(v) \geq n/2$ in $d^-(v) \geq n/2$ za vsako točko v, potem je D Hamiltonov.*

Turnirji

Že samo ime nam pove uporabnost v športnih turnirjih, kjer vsak igralec igra z vsakim ter neodločen izid ni možen (spomnimo se na tenis). Glede na usmerjenost povezav se da razbrati, kdo je premagal koga.

Trditev 0.7 *Število turnirjev z n udeleženci je $2^{\binom{n}{2}}$.*

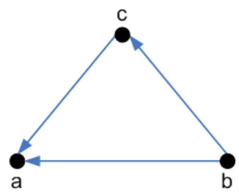
Dokaz: Vsaka usmerjena povezava ima začetek in konec. Torej imamo pri vsaki povezavi dva udeleženca, od katerih je en zmagovalec in en poraženec. Sedaj se vprašajmo na koliko načinov lahko izberemo dva izmed n udeležencev. Glede na to, da jih med sabo ločimo (udeležence) bo odgovor $\binom{n}{2}$. Pri vsakem paru pa se lahko še odločimo kam je povezava usmerjena. Pri vsaki povezavi ločimo med dvema možnostima:

- prvi premaga drugega;
- drugi premaga prvega.

Ker je $\binom{n}{2}$ povezav, imamo skupno $2^{\binom{n}{2}}$ turnirjev. ■

Turnir T je digraf, katerega temeljni graf je poln graf. T je *nerazcepni*, če nima usmerjenih prerezov (oz. nima tepene skupine), sicer je *razcepni.* To pomeni, da množica udeležencev turnirja razpade na dve neprazni skupini A in B. V skupini A (tepena skupina) so vsi, ki so izgubili vse igre s tekmovalci iz B (zmagovalna skupina).

Turnir T je *tranzitiven*, ko velja: Če sta ab in bc usmerjeni povezavi v T, potem je tudi ac usmerjena povezava v T. Pri turnirjih predstavlja $d^+(a)$ število zmag in $d^-(a)$ število porazov udeleženca a.



Slika 4: Turnir s tremi igralci. Beremo: Igralec c je premagal igralca a, igralec b pa je premagal igralca a in c.

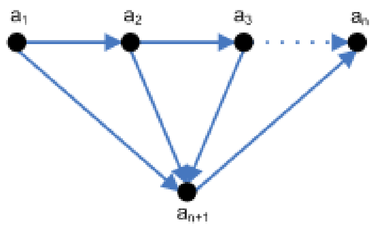
Izrek 0.8 *Vsak turnir ima usmerjeno Hamiltonova pot.*

Dokaz: Dokaz bomo naredili z indukcijo na število tekmovalcev n. Izrek očitno velja za $n = 1$. Denimo da izrek velja za turnir z n udeleženci. Preverimo, da bomo iz tega lahko ugotovili, da velja tudi za poljubni turnir z $n + 1$ udeleženci.

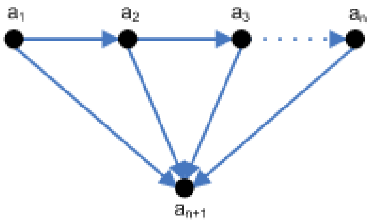
Imamo turnir z $n+1$ udeleženci $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$. Sedaj vzemimo tekmovalca a_{n+1} stran iz turnirja. Tako imamo le n tekmovalcev $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Po indukcijski predpostavki izrek velja za n. Torej med temi tekmovalci obstaja usmerjena Hamiltonova pot, recimo $H = a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$. Posebej pa imamo tekmovalca a_{n+1}, ki ga vključimo v H ter tako dobimo Hamiltonovo pot prvotnega turnirja.

Najprej se spomnimo, da je v turnirju med vsakima dvema tekmovalcema usmerjena povezava, torej tudi med a_1 in a_{n+1}. Če bi ta usmerjena povezava potekala od a_{n+1} do a_1, bi imeli Hamiltonovo pot $a_{n+1}, a_1, a_2, \ldots, a_n$. Ostane nam le še primer, da je ta povezava usmerjena v drugo smer, od a_1 do a_{n+1}. Če bi bila usmerjena povezava od a_{n+1} do a_2, bi imeli usmerjeno Hamiltonovo pot $a_1, a_{n+1}, a_1, a_3, \ldots, a_n$. Ker je to turnir mora med vsakim parom udeležencev turnirja obstajati usmerjena povezava, tudi med a_{n+1} in a_2. Zato jo usmerimo od a_2 proti a_{n+1} (v nasprotno smer smo že našli usmerjeno Hamiltonovo pot).

Podobno sklepamo dalje do tekmovalca a_n. Če bi bila usmerjena povezava od a_{n+1} do a_n, bi imeli Hamiltonovo pot $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_{n+1}, a_n$.



Zadnji primer, ki nam je ostal je, da so vse povezave usmerjene od a_i do a_{n+1} za $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ (saj smo v vseh drugih primerih že našli usmerjeno Hamiltonovo pot). V slednjem primeru je usmerjena Hamiltonova pot $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}$.



S tem je naš izrek dokazan, ker smo iz vednosti, da obstaja Hamiltonova pot v turnirju z n udeleženci lahko sklepali, da obstaja tudi v turnirju z $n+1$ udeleženci.

■

Izrek 0.9 *Turnir T je Hamiltonski natanko takrat ko je nerazcepen.*

Dokaz: ($\Rightarrow$): Dokazati moramo, da če je T razcepen, potem ni Hamiltonski. Naredimo trivialni razmislek: če je T razcepen, potem obstaja tepena skupina $A \subset V(T)$. Iz množice A ne moremo priti v zmagovalno skupino B, saj iz množice A ne obstaja nobena povezava, ki bi bila usmerjena navzven iz te množice. Torej ne obstaja usmerjen Hamiltonov cikel v turnirju T.

($\Leftarrow$): Naj bo T nerazcepen. Želimo pokazati, da je T Hamiltonski. Dokaza se lotimo s protislovjem: Recimo, da turnir T ni Hamiltonski. Izberimo $a \in V(T)$. Potem vemo, da obstaja $b \in V(T)$ tako, da usmerjena povezava poteka od a do b. Če to ne bi bilo res, potem bi bile vse povezave usmerjene proti točki a in tako bi $\{a\}$ predstavljala tepeno, $V(T)$ pa zmagovalno skupino. Torej bi bil T razcepen, kar je v nasprotju s predpostavko.

V zgornjem premisleku je a poljubna točka, zato to velja za vsako točko turnirja T. Po trditvi 0.3 sledi, da v T obstaja usmerjen cikel.

V T izberimo najdaljši usmerjen cikel $C = v_1, v_2, \ldots, v_n, v_1$. Če bi bil C Hamiltonov bi prišli v protislovje in bi bil izrek že dokazan. Zato recimo, da T ni Hamiltonov, to pomeni, da obstajajo točke, ki niso v C. Te točke razdelimo v tri skupine:

- A_1 - udeleženci, ki so z nekaterimi udeleženci cikla C zmagali, z nekaterimi pa izgubili
- A_2 - udeleženci, ki so premagali vse iz C
- A_3 - udeleženci, ki so izgubili z vsemi iz C.

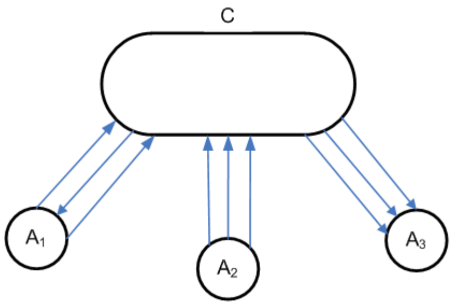
Vemo, da $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \neq \emptyset$, saj smo predpostavili, da C ni Hamiltonov.

Za A_1 imamo dve možnosti, in sicer da je $A_1 = \emptyset$ ali pa da $A_1 \neq \emptyset$.
Trdimo, da je skupina A_1 prazna, sicer obstaja $a_1 \in A_1$. Lahko najdemo dve sosednji točki $v_i \in C$ in $v_{i+1} \in C$ tako, da obstajata usmerjeni povezavi $v_i a_1$ in $a_1 v_{i+1}$. Tako dobimo

usmerjen cikel $C^* = v_1, v_2, \ldots, v_i, a, v_{i+1}, \ldots, v_n$, ki je daljši od C, torej smo prišli v protislovje, kar pomeni, da je $A_1 = \emptyset$.

Velja: $A_2 = \emptyset \Leftrightarrow A_3 = \emptyset$. Če je $A_2 = \emptyset$, je A_3 tepena skupina. To je v nasprotju s predpostavko, da je T nerazcepen, zato je tudi $A_3 = \emptyset$. Če je $A_3 = \emptyset$, je A_2 zmagovalna skupina, kar je v protislovju, da je T nerazcepen.

Ker smo torej rekli, da $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \neq \emptyset$, tudi A_2 in A_3 ne bosta prazni (saj smo že ugotovili, da je A_1 prazna). Obstajata $a_2 \in A_2$ in $a_3 \in A_3$, tako da a_3 premaga a_2 (Če to ne bi držalo, bi bila A_3 tepena skupina). Sedaj razširimo C na $C^+ = v_1, v_2, \ldots, v_i, a_3, a_2, v_{i+1}, \ldots, x_n$.



Dobili smo usmerjen cikel C^+, ki je daljši od cikla C. Prišli smo v protislovje, torej je C usmerjen Hamiltonov cikel in T je Hamiltonski.

■

Literatura

[1] R. J. Wilson, J. J. Watkins: *Uvod v teorijo grafov*, DMFA, 1997.

[2] M. Juvan, P. Potočnik: *Teorija grafov in kombinatorika*, DMFA, 2000.

[3] D. Bajc, T. Pisanski: *Najnujnejše o grafih*, DMFA, 1985.

[4] D. B. West: *Introduction to Graph Theory*, Second Edition, Prentice Hall, 2001.